Leçon 221 : Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

Berthelin
Dreveton - L.
Rouvière (dev 2)

On considère I un intervalle de $\mathbb{R}$, $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Théorie des équations différentielles linéaires

1. Définitions

Définition 1.1 Une équation différentielle ordinaire (EDO) linéaire d'ordre p est une équation (E) : $y^{(p)} = \sum_{i=0}^{p-1} A_i(t) y^{(i)} + B(t)$ où $A_i : I \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \longrightarrow \mathbb{K}^n$ continues.

Lorsque $n > 1$, on parle de système d'équations différentielles.

Définition 1.2 Lorsque $B = 0$, on parle d'équation homogène. L'équation homogène associée à (E) est notée (E_H).

Définition 1.3 Le système est dit autonome lorsque A et B sont constantes sur I.

Proposition 1.4 Une EDO linéaire d'ordre p sur $\mathbb{K}^n$ se ramène à une EDO linéaire sur $\mathbb{K}^{np}$ d'ordre 1 par :

$$Z' = \begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & I_n \\ A_0(t) & \cdots & \cdots & \cdots & A_{p-1}(t) \end{pmatrix} Z + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B'(t) \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad Z := \begin{pmatrix} y \\ \vdots \\ y^{(p-1)} \end{pmatrix}.$$

Conséquence 1.5 Dans la suite, on peut se restreindre au cadre d'ordre 1 sans perte de généralités.

2. Structure de l'espace des solutions

Définition 1.6 Soient $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}^n$. Le problème de Cauchy associé à (E) consiste à résoudre (C) : $\begin{cases} Y' = A(t)Y + B(t) \\ Y(t_0) = y_0 \end{cases}$

Théorème 1.7 (Cauchy-Lipschitz linéaire) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $A : I \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \longrightarrow \mathbb{K}^n$ continues. Soit $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}^n$. Alors, il existe une unique solution $y : I \longrightarrow \mathbb{K}^n$ du problème de Cauchy (C).

développement 1

Lemme 1.8 (Grönwall) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$, $a \in \mathbb{R}$ et $u, v \in C^0(I, \mathbb{R})$. Supposons $u, v \geq 0$ et $u(t) \leq a + \left|\int_{t_0}^t v(s)u(s)\,ds\right|$. Alors, pour tout $t \in I$, $u(t) \leq a e^{\left|\int_{t_0}^t v(s)u(s)\,ds\right|}$

Lemme 1.9 Le problème de Cauchy (C) avec $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \beta]$ admet une solution.

Théorème 1.10 L'ensemble S_H des solutions maximales de (E_H) est un sous-espace vectoriel de $C^1(I, \mathbb{K}^n)$, de dimension n.

Corollaire 1.11 L'ensemble S des solutions maximales de (E) est un $\mathbb{K}$-espace affine de direction S_H.

Conséquence 1.12 Pour résoudre une EDO non homogène, on résout l'EDO homogène associée et on cherche une solution particulière. On obtient alors l'ensemble des solutions.

II. Résolution explicite

1. Système à coefficients constants

Définition 2.1 Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $\exp M := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!}$.

Proposition 2.2 Les solutions de (E_H) sont données par $Y(t) = \exp(A(t - t_0)) Y(t_0)$, $t_0 \in I$.

Exemple 2.3
la solution maximale de $\begin{cases} y'' - 2y' + y = 0 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2 \end{cases}$ est $t \in \mathbb{R} \longmapsto (t+1)e^t$

Proposition 2.4 Si A est diagonalisable, en notant v_k les vecteurs propres associés aux valeurs propres λ_k, une base de (E_H) est donnée par les $t \longmapsto e^{\lambda_k t} v_k$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.

Application 2.5 En résolvant $(S_1) : \begin{cases} f'(t) = Lf(t) \\ f(0) = H \end{cases}$ et $(S_2) \begin{cases} g'(t) = e^{tL} H \\ g(0) = 0 \end{cases}$ avec $L \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on montre que $d(\exp)M = e^M \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\mathrm{ad}\, M)^k}{(k+1)!}$ où $\mathrm{ad}\, M(H) = MH - HM$.

développement 2

2. Méthode de variation de la constante

Objectif On considère $(E) : Y' = A(t)Y + B(t)$. On cherche, connaissant $(X_1, \dots, X_n)$ une base de S_H, une solution particulière Y_P.

Définition 2.6 (méthode de variation de la constante) On cherche une solution particulière sous la forme $Y_P(t) = \alpha_1(t) X_1(t) + \dots + \alpha_n(t) X_n(t)$.

Proposition 2.7 Une fonction de cette forme est solution si et seulement si $\sum_{i=1}^n \alpha_i' X_i = B$.

Remarque 2.8 On procède alors ainsi :

- Résolution de (E_H)
- inversion de $R(t) := (X_1(t), \dots, X_n(t))$
- calcul des primitives des α_i
- conclusion

Exemple 2.9
l'ensemble des solutions de $y' + \frac{2t}{1+t^2} y = \frac{1+3t^2}{1+t^2}$ est $\left\{ t \longmapsto t + \frac{\lambda}{1+t^2}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

Proposition 2.10 (formule de Duhamel) Lorsque A est constante, les solutions de (E) s'écrivent sous la forme $t \longmapsto \exp((t-t_0)A) Y_0 + \int_{t_0}^t \exp((t-s)A) B(s)\, ds$.

Exemple 2.11
Résolution de $y'' + ay' + by = \cos \omega t$

III. Étude qualitative pour n = 2

On se place dans le cadre A constante, $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

Rappel 3.1 Les solutions de (E_H) sont données par : $Y(t) = \exp((t-t_0)A) Y(t_0)$, $t_0 \in I$.

Lemme 3.2 Modulo un bon choix de base, il y a trois cas à étudier :

(1) $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ alors $Y(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} Y(0)$

(2) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ alors $Y(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y(0)$

(3) $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ alors $Y(t) = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \beta t & -\sin \beta t \\ \sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix} Y(0)$

Proposition 3.3

- supposons être dans le cadre (1) avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$ de même signe
  - si $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, on parle de noeud impropre répulsif, les solutions s'éloignent du point stationnaire 0 quand $t \longrightarrow +\infty$ (figure 1)
  - si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, on parle de noeud impropre attractif, les solutions tendent vers le point stationnaire 0 quand $t \longrightarrow +\infty$ (figure 2)
- supposons être dans le cadre (1) avec $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, on parle de point selle (figure 3)
- supposons être dans le cadre (2)
  - si $\lambda > 0$, on parle de noeud dégénéré répulsif (figure 4)
  - si $\lambda < 0$, on parle de noeud dégénéré attractif (figure 5)
- supposons être dans le cadre (3)
  - si $\alpha = 0$, on parle de centre (figure 6)
  - si $\alpha > 0$, on parle de spirale instable, les solutions s'éloignent du point stationnaire 0 (figure 7)
  - si $\alpha < 0$, on parle de spirale stable, les solutions tendent vers 0. (figure 8)

Annexe